Определение оптимального сечения изгибаемого элемента из клеёной древесины

Определить оптимальное сечение изгибаемого элемента прямоугольного сечения b×h из клееной древесины при следующих данных: пролёт l=6 м; равномерно распределённая расчётная нагрузка q=5 кН/м (осреднённое значение коэффициента надёжности по нагрузке γ_{fm}=1,23); коэффициент условия работы γ_d=0,8; сечение постоянно по длине элемента, т.е. EI=const; расчётное сопротивление клеёной древесины Ru=13 МПа; модуль деформации древесины E=10000 МПа.

Первый этап решения задачи – составление математического описания.

1 шаг – определить границы элемента. Для этого сформирована расчётная схема элемента (модель объекта), которая представлена на рис. 1 и описывается следующими параметрами:

– геометрическими: b, h, l, при этом сечение балки составное – из склеенных между собой досок толщиной t;

– физическими: E, Ru;

– параметрами граничных условий: а) кинематических – на рис. 1 показаны шарнирные закрепления на левой и правой опорах балки; б) силовых – там же приведена схема приложения нагрузки q и её величина.

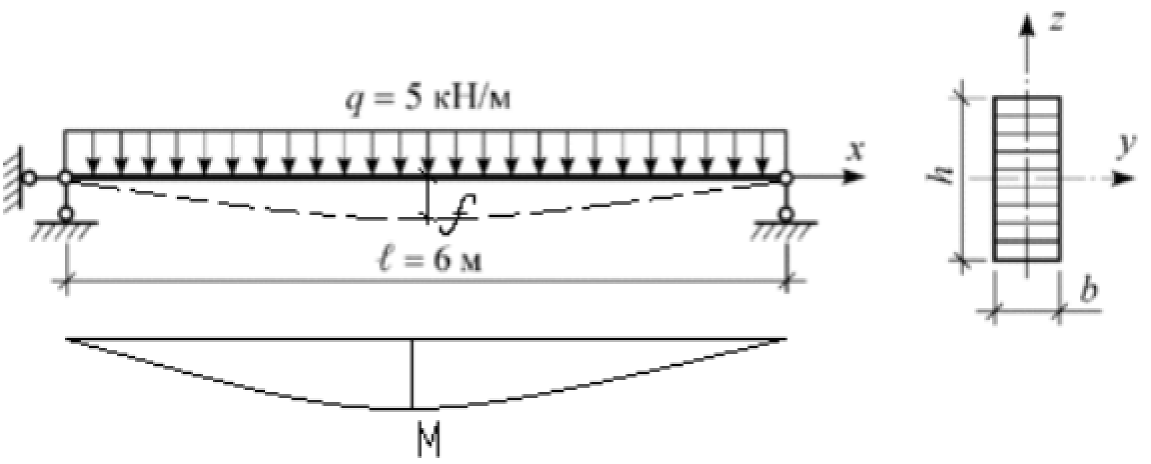

Рис. 1. Расчётная схема балки

2 шаг – выбрать критерий оптимальности. За критерий оптимальности принимаем объем древесины изгибаемого элемента (для конструкции из однородного материала этот критерий более удобен, чем вес конструкции или стоимость).

3 шаг – определить общее число независимых параметров, влияющих на величину критерия оптимальности, провести их ранжирование на эту величину. Объём элемента определяется по известной формуле:

$$V = b\,h\,l. \qquad (1)$$

В выражении (1) длина элемента – величина постоянная, т.е. l=6 м – const (по условию задачи) является неуправляемым или иначе свободным параметром. Поэтому на критерий оптимальности влияют два управляемых параметра: x1→h и x2→b – высота и ширина поперечного сечения элемента.

4 шаг – составить уравнение целевой функции. Используя выражение (1) запишем:

$$F= V= b\ h\ l= 6bh \ \to\min . \qquad (2)$$

5 шаг – составить неравенства-ограничения. Из курса сопротивления материалов известно, что плоскому изгибу наилучшим образом сопротивляются сечения балок, которые вытянуты вдоль плоскости изгиба. Это так, поскольку при определении прочности и жёсткости балки, соответственно, для момента сопротивления $W=bh^2/6$ и момента инерции $I=bh^3/12$, высота сечения h стоит во второй и третьей степени и её влияние поэтому более ощутимо, чем у ширины сечения b, стоящей в первой степени. Поэтому если увеличение h балки не ограничено требованиями высоты перекрытия, то высота сечения балки минимального объёма стремиться к бесконечности. Однако рост h сдерживается соображениями устойчивости плоской формы изгиба: чем меньше ширина сечения балки b, тем меньше критическая нагрузка потери устойчивости. Следовательно, оптимальной по объёму будет такая балка, у которой запасы прочности, жёсткости и устойчивости равны.

Помимо расчётных (теоретических) ограничений для реальных балок существуют также конструктивные требования (ограничения). Так, балки из досок, склеенных плашмя, имеют ширину сечения не более 170 мм, что позволяет изготавливать их из цельных по ширине досок. При этом нормы рекомендуют принимать ширину сечения не менее $b\geq h/6$, а высоту находить в пределах $h\approx(1/10-1/12)l$. Кроме того, балки склеивают из досок толщиной t не более 50 мм.

Таким образом, для рассматриваемого изгибаемого элемента (рис. 1) запишем следующие ограничения-неравенства:

– из условия прочности

$$\sigma = \frac{M}{W} \leq R_u \gamma_d ; \qquad (3)$$

– из условия устойчивости плоской формы изгиба

$$\sigma_{кр} = \frac{M}{W} \leq R_u \gamma_d \varphi_d ; \qquad (4)$$

– из условия деформативности

$$f = \frac{5ql^4}{384EI} \leq [f]; \qquad (5)$$

– из конструктивных требований

b ≤170мм, 6 h b ≥ , h≤1/10l≈600 мм; t ≤ 50мм, (6)

где f – прогиб в опасном сечении; [f]=l/300 – предельный прогиб; φ_d – коэффициент поперечной устойчивости балки.

6 шаг – составление уравнений состояния. Поскольку задача является линейной, статически определимой, то надобности в этих уравнениях нет.

Второй этап – решение математической задачи.

7 шаг – провести анализ целевой функции и неравенств-ограничений. Целевая функция (2) представляет собой уравнение с двумя неизвестными (b, h), характеризующими размеры поперечного сечения балки.

Для удобства анализа неравенств-ограничений (3-5) перепишем их в следующем виде:

– из условия прочности

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{ql^2}{8}\frac{6}{bh^2} \le R_u\gamma_d \text{ или } \frac{3ql^2}{4bh^2} \le R_u\gamma_d, \tag{7}$$

где $M = \dfrac{ql^2}{8}$ – величина максимального изгибающего момента в середине пролёта балки;

– из условия устойчивости плоской формы изгиба

$$\sigma_{кр} = \frac{3ql^2}{4bh^2} \le R_u\gamma_d\frac{160b^2}{hl} \text{ или } \frac{3ql^3}{640b^3h} \le R_u\gamma_d, \tag{8}$$

где $\varphi_d = \dfrac{160b^2}{hl}$ – коэффициент поперечной устойчивости для однопролётной балки, загруженной равномерно распределённой нагрузкой;

– из условия деформативности

$$f = \frac{5q_n l^4}{384EI} = \frac{5q_n l^4 12}{384Ebh^3} \le \frac{l}{300} \text{ или } \frac{750\dfrac{q}{\gamma_{fm}}l^3}{16Ebh^3} \le 1, \tag{9}$$

где $q_n = \dfrac{q}{\gamma_{fm}}$ – нормативная погонная нагрузка; $\gamma_{fm} = 1{,}23$– средний коэффициент надёжности по нагрузке;

– из конструктивных требований

$$h = nb \le 600мм,\ n=1;\ 1{,}5;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ b \le 170мм;\ t \le 50мм, \tag{10}$$

где n – число кратности, дискретные значения которого приняты произвольно по конструктивным соображениям.

То есть ограничения (7)-(10) представляют собой неравенства с двумя неизвестными h и b, характеризующими размеры поперечного сечения балки.

Таким образом, на основании математического описания задачи (2), (7)-(10) она относится к задачам линейного программирования с двумя неизвестными h и b. Однако если учесть первое из ограничений (10), то можно существенно сузить область допустимых решений задачи с двумя переменными (вторая из которых может принимать конечное число дискретных значений):

$$F = V = \frac{6h^2}{n} \to \min,$$ n=1; 1,5; 2; 3; 4; 6. (11)

Тогда ограничения (7)-(9) можно представить в следующем виде:

– из условия прочности

$$\frac{3ql^2}{4\frac{h}{n}h^2} \le R_u\gamma_d \text{ или } h \ge \sqrt[3]{\frac{3ql^2n}{4R_u\gamma_d}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot5\cdot6^2n}{4\cdot13000\cdot0,8}} = 0,235\sqrt[3]{n};$$

(12)

– из условия устойчивости плоской формы изгиба

$$\frac{3ql^3}{640\frac{h}{n^3}^3 h} \le R_u\gamma_d \text{ или}$$

$$h \ge \sqrt[4]{\frac{3ql^3n^3}{640R_u\gamma_d}} = \sqrt[4]{\frac{3\cdot5\cdot6^3n^3}{640\cdot13000\cdot0,8}} = 0,148\sqrt[4]{n^3};$$

(13)

– из условия деформативности

$$\frac{375ql^3}{16E\frac{h}{n}h^3} \le 1 \text{ или}$$

$$h \ge \sqrt[4]{\frac{750\frac{q}{\gamma_{fm}}l^3n}{16E}} = \sqrt[4]{\frac{750\cdot\frac{5}{1,23}\cdot6^3n}{16\cdot10^7}} = 0,253\sqrt[4]{n}.$$

(14)

Внимание: в формуле (14) для модуля E следует перевести единицы измерения из МПа в кН/м2 , т.е. умножьте эту величину на 103 !

8 шаг – выбрать метод решения задачи. Имеем решение нелинейного уравнения с двумя неизвестными (11).

Построим область допустимых решений (ОДР) для клеёной балки. Выберем прямоугольную систему координат с осями n и h. Из условия прочности (7), поперечной устойчивости (8) и деформативности (9) определим высоту сечения балки при различных n=1; 1,5; 2; 3; 4; 6.

– из условия прочности

при n=1: $h = 0,235\sqrt[3]{1} = 0,235$м;

при n=1,5: $h = 0,235\sqrt[3]{1,5} = 0,269$м;

при n=2: $h = 0,235\sqrt[3]{2} = 0,296$м.

при n=3: h = 0,235 $\sqrt[3]{3}$ 0,339м ;

при n=4: h = 0,235 $\sqrt[3]{4}$ 0,373м ;

при n=6: h = 0,235 $\sqrt[3]{6}$ 0,427м ;

– из условия устойчивости плоской формы изгиба

при n=1: h = 0,148 $\sqrt[3]{1}$ = 0,148м ;

при n=1,5: h = 0,148 $\sqrt[3]{1,5}$ =0,201м ;

при n=2: h = 0,148 $\sqrt[3]{2}$ = 0,250м ;

при n=3: h = 0,148 $\sqrt[3]{3}$ = 0,339м ;

при n=4: h = 0,148 $\sqrt[3]{4}$ = 0,420м ;

при n=6: h = 0,148 $\sqrt[3]{6}$ = 0,569м ;

– из условия деформативности

при n=1: h = 0,253 $\sqrt[3]{1}$ = 0,253м ;

при n=1,5: h = 0,253 $\sqrt[3]{1,5}$ = 0,280м ;

при n=2: h = 0,253 $\sqrt[3]{2}$ = 0,301м ;

при n=3: h = 0,253 $\sqrt[3]{3}$ = 0,333м ;

при n=4: h = 0,253 $\sqrt[3]{4}$ = 0,358м ;

при n=6: h = 0,253 $\sqrt[3]{6}$ = 0,396м.

Полученные данные являются теоретическими значениями высоты сечения балки $h_{\text{теор}}$, представим их в табличном виде.

Таблица 1

n=h/b	Теоретическое значение высоты сечения $h_{\text{теор}}$ из условия, м		
	прочности (12)	устойчивости (13)	деформативности (14)
1	0,235	0,149	**0,253**
1,5	0,269	0,201	**0,280**
2	0,296	0,250	**0,301**
3	0,339	**0,339**	0,333
4	0,373	**0,420**	0,358
6	0,427	**0,569**	0,396

Примечание: жирным шрифтом выделены границы ОДР: нижняя n=1; верхняя n=6; левая h=0,253 м; h=0,280 м; h=0,301 м; h=0,339 м; h=0,420 м; h=0,569 м.

По полученным данным построим графики и установим область допустимых решений (рис.2).

Границами области допустимых решений являются: нижняя n=1; верхняя n=6; левая – кривые теоретических значений высоты сечения $h_{\text{теор}}$, полученных из условий поперечной устойчивости (13) при n=4; 6 и деформативности (14) при n=1, 1,5, 2, 3.

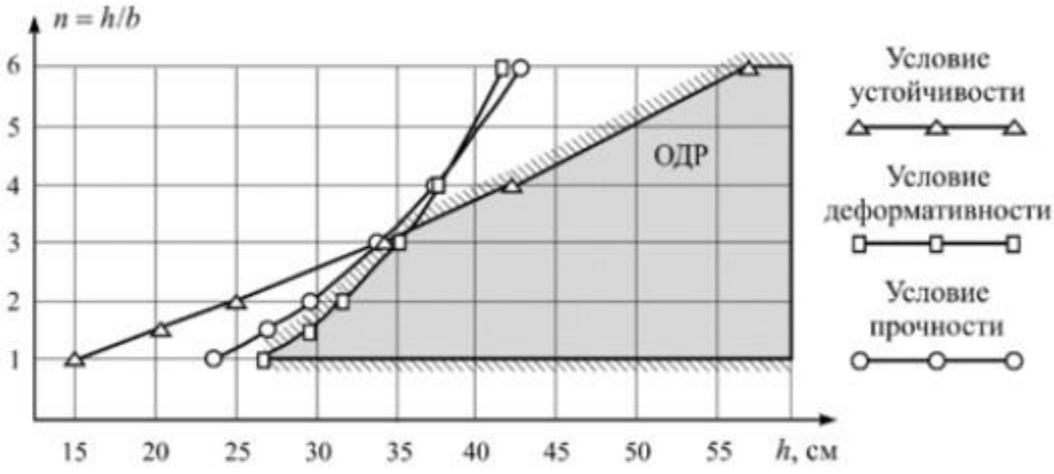

Рис. 2. Построение области допустимых решений

Для вычисления оптимальной по объёму балки определим фактические размеры сечения из условия технологии изготовления балок из досок, склеенных плашмя. Балки склеивают из досок толщиной не более t=50 мм.

Доски перед склеиванием обрабатываются (фрезеруются) по пластам на величину Δt=2,5-3,5 мм, а после склеивания кромки балок фрезеруют в среднем на величину Δb=5 мм.

Тогда фактические размеры поперечного сечения балок будут равны:

$$h_{факт} = m(t-\Delta t) = ceil\left(\frac{h_{теор}}{t-\Delta t}\right)(t-\Delta t) = ceil\left(\frac{h_{теор}}{0,05-0,005}\right)\cdot$$

$$\cdot(0,05-0,005) = 0,045\cdot ceil\left(\frac{h_{теор}}{0,045}\right) \tag{15}$$

$$b_{факт} = \frac{ceil\left[100\left(b_{теор}-\Delta b\right)\right]}{100} = \frac{ceil\left[100\left(\frac{h_{теор}}{n}-0,005\right)\right]}{100} \tag{16}$$

где m – количество досок в сечении; ceil(…) – математический оператор округления числа до целого в большую сторону; $h_{\text{теор}}$ – высота балки, определённая теоретически (табл.1).

Например, при n=h/b=2:

$$h_{факт} = 0,045\cdot ceil\left(\frac{0,301}{0,045}\right) = 0,045\cdot ceil(6,688) = 0,045\cdot 7 = 0,315м,$$

$$b_{факт} = \frac{ceil\left[100\left(\frac{0,301}{2} - 0,005\right)\right]}{100} = \frac{ceil(14,55)}{100} = \frac{15}{100} = 0,15 м.$$

Все значения $h_{факт}$, $b_{факт}$, вычисленные по формулам (15) и (16), а также объём балки – по формуле (2) – сведём в табл. 2.

Таблица 2

Расход древесины на балку

n=h/b	$h_{теор}$, м	$h_{факт}$, м	$b_{факт}$, м	V, м3
1	0,253	0,270	0,250	0,405
1,5	0,280	0,315	0,190	0,359
2	0,301	0,315	0,150	0,284
3	0,339	0,360	0,110	0,238
4	0,420	0,450	0,110	0,297
6	0,569	0,585	0,90	0,316

Вывод: для рассматриваемого клеёного изгибаемого элемента прямоугольного сечения оптимальными размерами сечения из условия минимального объёма (табл.2) будет сечение 360×110 мм ($h_{факт}$=360≤600 мм, $b_{факт}$=110≤170 мм), склеенное из 8 досок толщиной 45 мм и шириной 110 мм. Расход древесины составляет 3 F V= = 0,238м.

Таблица 3

Варианты заданий к задаче

№ вари-анта	Пролёт l, м	Нагрузка q, кН/и	Прочность $R_и$, МПа	Модуль де-формаций E, МПа	Предельный прогиб $[f]$	Коэф. на-дёжности γ_{fm}
1	4	4	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/150	1,15
2	5	5	11	$1,2 \cdot 10^4$	1/175	1,16
3	6	6	13	$0,9 \cdot 10^4$	1/200	1,17
4	7	3	13	$1,0 \cdot 10^4$	1/225	1,18
5	8	4	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/250	1,19
6	7	5	12	$1,2 \cdot 10^4$	1/225	1,20
7	6	6	12	$1,3 \cdot 10^4$	1/300	1,21
8	5	3	13	$0,8 \cdot 10^4$	1/175	1,22
9	4	4	12	$1,0 \cdot 10^4$	1/150	1,23
10	5	5	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/275	1,24
11	4	6	11	$1,1 \cdot 10^4$	1/220	1,25
12	5	3	13	$1,1 \cdot 10^4$	1/300	1,26
13	6	4	13	$1,2 \cdot 10^4$	1/250	1,27
14	7	5	12	$0,9 \cdot 10^4$	1/250	1,28
15	5	3	13	$1,0 \cdot 10^4$	1/275	1,29